

유형 1 포물선의 정의와 활용

출제유형 | 포물선의 초점의 좌표, 준선의 방정식, 꼭짓점의 좌표를 구 하거나 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이, 도형의 둘레의 길이와 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 포물선의 방정식으로부터 초점의 좌표를 구하는 방법과 포물선 위의 점에서 초점과 준선까지의 거리가 서로 같음을 이용하여 문제를 해결한다.

01

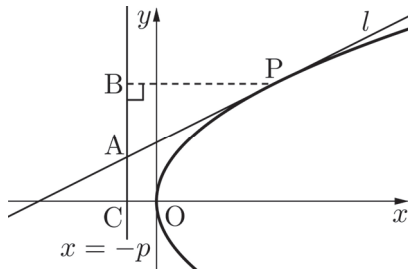
포물선 $y^2 = 4x$ 와 직선 $y = n$ 이 제1사분면에서 만나는 점을 P_n 이라 할 때, 포물선의 초점 F에 대하여 선분

FP_n 의 길이를 a_n 하자. $\sum_{n=1}^8 a_n$ 의 값을 구하시오.

(단, n 은 자연수이다.) [4점]

04

포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선 l 이 $x = -p$ 와 만나는 점을 A, 점 P에서 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 B, 좌표가 $(-p, 0)$ 인 점을 C라 하자. 점 A가 제2사분면에 있고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 5 : 3$ 일 때, 직선 l 의 기울기를 m 이라 하자. $100m^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



05

$y_1 = 8$ 이고, 자연수 n 에 대하여 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 (x_{2n-1}, y_{2n-1}) 에서의 접선의 y 절편을 y_{2n} 이라 하자. 직선 $y = y_{2n}$ 이 포물선 $y^2 = -8x$ 와 만나는 점의 좌표를 (x_{2n}, y_{2n}) 이라 하고 (x_{2n}, y_{2n}) 에서의 접선의 y 절편을 y_{2n+1} , $y = y_{2n+1}$ 이 $y^2 = 8x$ 와 만나는 점의 좌표를 (x_{2n+1}, y_{2n+1}) 이라 하자. 두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 에 대하여 $\frac{y_{11}}{x_9}$ 의 값을 구하시오. [4점]

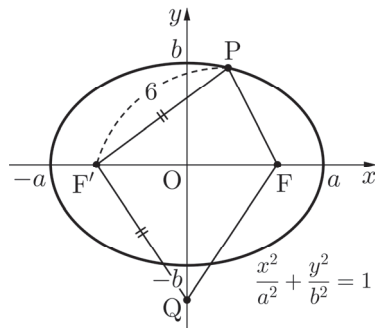
25

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 하자. 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P 와 y 축 위의 점을 $Q(0, -a)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{PF'} = \overline{QF'} = 6$

(나) 삼각형 $PF'F$ 와 삼각형 $QF'F$ 의 둘레의 차는 2이다.

c^2 의 값을 구하시오. [4점]

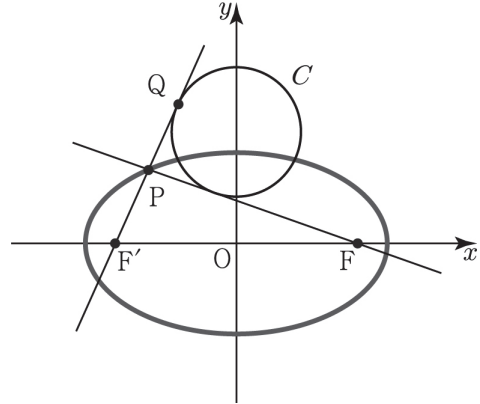


26

그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 타원

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a > 3)$$

위의 점 P 에 대하여 직선 FP 와 직선 $F'P$ 에 동시에 접하고 중심이 y 축 위에 있는 원 C 가 있다. 직선 $F'P$ 와 원 C 의 접점 Q 에 대하여 $\overline{F'Q} = 5$ 일 때, $a + \overline{F'F}$ 의 값을 구하시오. [4점]



48

점 $(2, 3)$ 에서 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 그은 두 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, β 라 할 때, $|\tan\alpha - \tan\beta|$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{19}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{21}}{3}$
 ④ $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{22}}{3}$

49

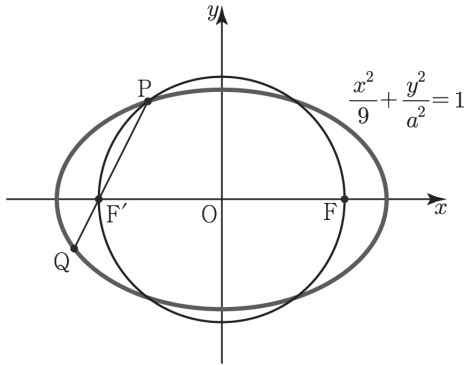
좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 과 포물선

$y^2 = 4px (p > 0)$ 이 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 타원과 포물선에 그은 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 할 때, $m_1 m_2$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{3}{8}$ ② $-\frac{11}{32}$ ③ $-\frac{8}{9}$
 ④ $-\frac{9}{32}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

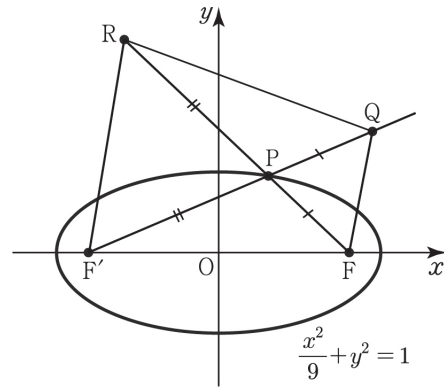
54

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($0 < a < 3$)의 두 초점을 F, F' 이라 하자. 이 타원이 선분 FF' 을 지름으로 하는 원과 만나는 점 중 제2사분면에 있는 점을 P 라 하고, 직선 PF' 이 이 타원과 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하자. 점 F' 이 선분 PQ 를 $3 : 1$ 로 내분할 때, $10a^2$ 의 값을 구하시오. (단, 점 F 의 x 좌표는 양수이다.) [4점]



55

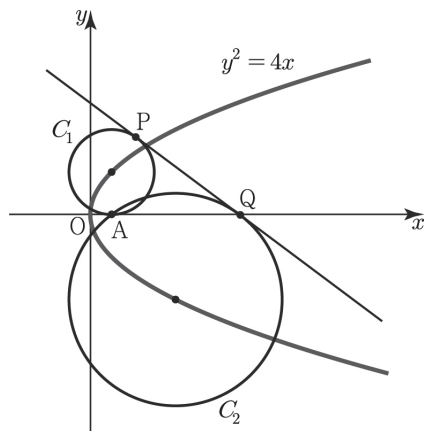
그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 할 때, 타원 위의 x 좌표가 a 인 점 P 를 잡는다. 또 선분 $F'P$ 의 연장선 위에 $\overline{PF} = \overline{PQ}$ 인 점 Q 를 잡고, 선분 FP 의 연장선 위에 $\overline{PF'} = \overline{PR}$ 인 점 R 를 잡는다. 사각형 $F'FQR$ 의 넓이가 최대일 때, a 의 값은? (단, $0 < a < 2\sqrt{2}$) [4점]



- ① $\frac{\sqrt{14}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{14}}{4}$
 ④ $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{14}}{4}$

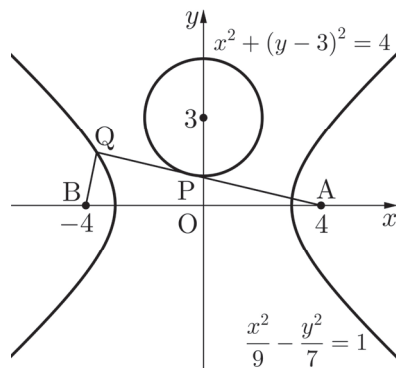
56

좌표평면에서 포물선 $y^2 = 4x$ 위에 중심이 있고 점 $A(1, 0)$ 을 지나는 두 원 C_1, C_2 의 중심은 각각 제1사분면과 제4사분면 위에 있다. 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 2, 5이고 기울기가 음수인 직선 l 이 두 원 C_1, C_2 에 동시에 접한다. 직선 l 과 두 원 C_1, C_2 의 접점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오. [4점]



57

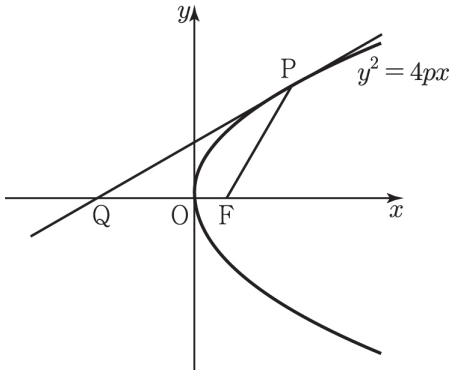
그림과 같이 점 $A(4, 0)$ 을 지나고 원 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 과 제2사분면에 있는 점 P에서 접하는 직선을 l 이라 하고 직선 l 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 이 제2사분면에서 만나는 점을 Q라 하자.



점 $B(-4, 0)$ 에 대하여 $\overline{PQ} - \overline{BQ} = p - \sqrt{q}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]

82

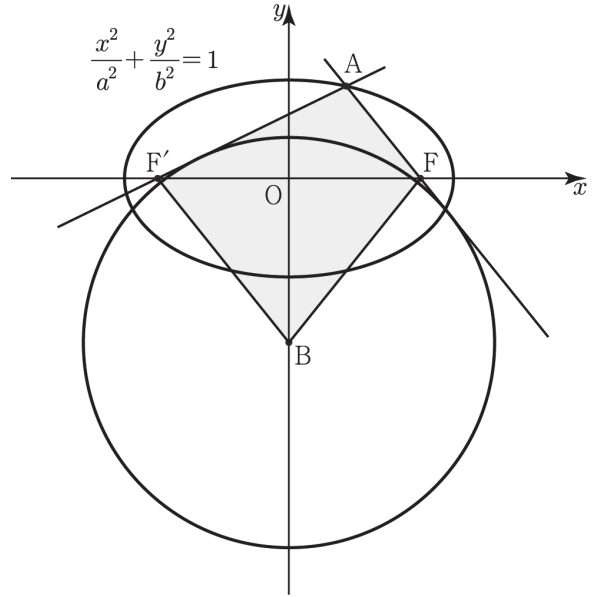
그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 이 접선이 x 축과 만나는 점을 Q, 포물선의 초점을 F라 하자. 삼각형 PQF의 넓이가 $9\sqrt{3}$ 일 때, p 의 값은? (단, $p > 0$) [4점]



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

83

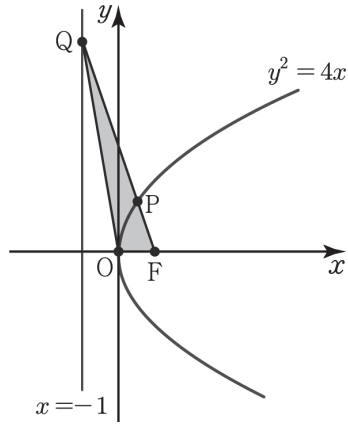
두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 중심이 $B(0, -4)$ 이고 반지름의 길이가 5인 원 C가 두 직선 AF, AF'에 동시에 접할 때, 사각형 AFBF'의 넓이가 20이다. a 의 값은? [4점]



- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

84

그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2 = 4x$ 위를 움직이는 점 P 가 있다. 포물선의 초점을 F 라 할 때, 직선 FP 가 포물선의 준선과 만나는 점을 Q 라 하자.

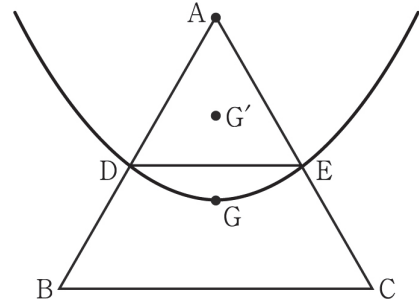


$\overline{FP} : \overline{PQ} = 1 : 4$ 일 때, 삼각형 OFQ 의 넓이는?
(단, 직선 FP 의 기울기는 음수이다.) [3점]

- ① $\sqrt{13}$ ② $\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{17}$

85

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 하자. 점 G 를 꼭짓점으로 하고 점 A 를 초점으로 하는 포물선과 변 AB 가 만나는 점을 D , 포물선과 변 AC 가 만나는 점을 E 라 할 때, 삼각형 ADE 의 무게중심을 G' 라 하자. 선분 $G'G$ 의 길이는?
[4점]



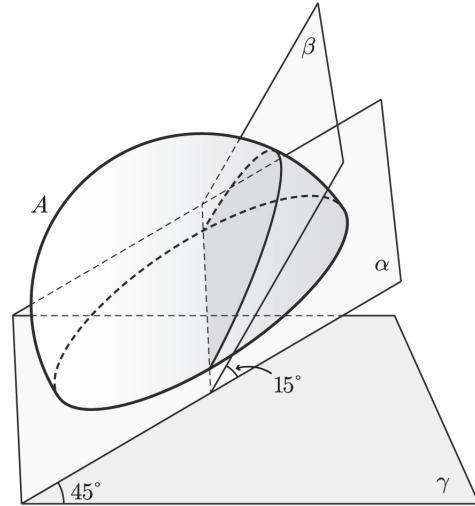
- ① $10 - \frac{14}{3}\sqrt{3}$ ② $10 - 5\sqrt{3}$
③ $10 - \frac{16}{3}\sqrt{3}$ ④ $10 - \frac{17}{3}\sqrt{3}$
⑤ $10 - 6\sqrt{3}$

224

좌표공간 위의 점 $A(-2, -2, 1)$ 에서 xy 평면 위의 원 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 위를 움직이는 점까지의 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M^2 \times m^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

225

그림과 같이 반지름의 길이가 4인 반구가 밑면이 평면 α 위에 오도록 놓여있다. 반구의 중심을 지나고, 평면 α 와 15° 의 각을 이루는 평면 β 에 의하여 이 반구가 두 부분으로 나뉘어질 때, 부피가 큰 쪽의 입체를 A 라 하자.



평면 α 와 45° 의 각을 이루고 평면 β 와 60° 의 각을 이루는 평면을 γ 라고 할 때, 입체도형 A 의 평면 γ 위로의 정사영의 넓이를 S 라 할 때, $\frac{S}{\pi}$ 의 값을 구하시오. [4점]